Analyse d'une description énergétique de l'actionnement pour le calcul du mouvement des masses

J. Abadie[a], C. Lexcellent[b]

a. *Institut FEMTO ST, Département AS2M, 24 rue Alain Savary, 25000 BESANCON*
b. *Institut FEMTO ST, Départ. Méc'Appli, 24 rue de l'Epitaphe, 25030 BESANCON*

Résumé :

Cet article introduit un modèle mécanique décrivant l'évolution de deux masses en interaction, en choisissant volontairement de traiter le problème sous une forme énergétique. Cette perspective impose de définir une grandeur qui agit sur les masses et dont la nature est inhabituelle, puisque il s'agit d'une puissance dirigée. Le modèle, une fois posé, est étudié et comparé aux approches de la mécanique relativiste et classique.

Abstract :

This article present a mechanical model describing the evolution of a system constituted by two mass in interaction. The problem is solved by choosing an energetic approach. A new quantity is defined to model the interaction. This quantity is quite unusual because it is a vectorized power. The model is written, studied and compared to the special relativity and to the classical approach.

Mots clefs : **actionnement ; énergétique ; relativité restreinte**

1 Introduction

Le mouvement d'un objet matériel peut être prédit en utilisant, par exemple, le principe fondamental de la dynamique écrit par Newton. Dans cette approche, la force est considérée comme la grandeur fondamentale à l'origine du mouvement. On peut également choisir une approche énergétique. L'équation du mouvement de Newton se retrouve de manière équivalente dans cette formulation basée sur le principe de moindre action. Elle aboutit à l'équation de Lagrange [1, 2] et fait intervenir une fonctionnelle décrivant l'état énergétique du système à résoudre. Les équations de Newton, de Lagrange, sont les outils incontestables servant à décrire le mouvement d'un objet matériel mais aussi du mouvement des planètes de notre système solaire [3]. Pourtant, les physiciens ont mis rapidement en évidence les limites de l'équation de Newton notamment en astrophysique où il devient impossible de décrire de manière cohérente la structure de l'univers. C'est grâce notamment aux travaux d'Einstein et à l'écriture de l'équation de la relativité restreinte que les observations ont pu être corrélées avec son modèle [4]. Même s'il est pratique de travailler avec la force (en approche classique) ou les quadrivecteurs (en relativité), les approches énergétiques prennent le pas lorsqu'il s'agit de décrire des systèmes multiphysiques. En effet, dans tous les systèmes qu'ils soient électriques, mécaniques ou magnétiques, on peut toujours définir une grandeur énergétique d'état, permettant de les caractériser. Le grand avantage de travailler avec des grandeurs énergétiques est qu'il est possible de combiner des phénomènes variés en écrivant la loi de conservation de l'énergie. L'énergie d'un système clos, c'est à dire la somme des énergies de ses constituants, reste constante. L'idée maitresse développée dans cet article est de décrire l'évolution de deux masses en interaction en choisissant volontairement de traiter le problème sous une forme énergétique. Nous proposons d'utiliser une grandeur non conventionelle, une puissance dirigée pour modéliser les différents échanges d'énergie. L'ensemble des processus de transformation de la matière en énergie, sa transmission et les conséquences sur le mouvement sont analysés sur un exemple constitué de deux masses en interaction. Les bases fondamentales du modèle

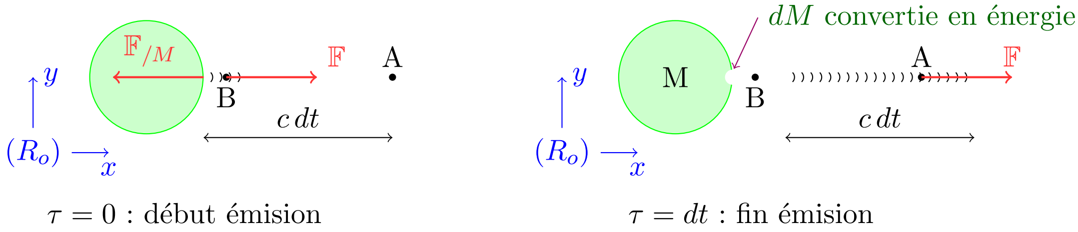

FIG. 1 – Etablissement de la puissance dirigée par perte de masse et transmission en différents points de l'espace.

sont alors posées. Finalement, l'approche est comparée d'un point de vue conceptuel à l'approche classique de la mécanique relativiste. Nous montrons que d'un point de vue mathématique, le modèle est équivalent à la relativité restreinte.

2 Le modèle proposé

Nous allons définir un nouveau modèle qui fait intervenir une grandeur de commande de nature énergétique. Ce modèle s'appuie sur plusieurs postulats de départ qui sont posés maintenant.

2.1 Hypothèses du modèle

La principale hypothèse consiste à tenir compte de la vitesse de propagation de l'énergie pour modéliser les transferts d'énergie qui s'opèrent dans la réalité. Cette vitesse est $c = 2,99792458\,10^8$ m/s et correspond à la célérité de la lumière dans le vide. On suppose que l'énergie émise par un système provient exclusivement d'une décomposition de matière en énergie. En vertu de la relation $E = M\,c^2$, on considère qu'un système au repos, de masse importante M peut émettre, en se plaçant dans un référentiel attaché à M, une quantité d'énergie par unité de temps égale à :

$$\mathcal{P} = \frac{dE}{dt} = \frac{dM}{dt}c^2 \qquad [W] \tag{1}$$

La particularité de l'approche est qu'au lieu d'utiliser la puissance $\mathcal{P}$ qui est un scalaire, on utilise la grandeur vectorielle $\mathbb{F}$ définie par :

$$\mathbb{F} = \mathcal{P}\,\vec{r} \qquad [\vec{W}] \tag{2}$$

$\vec{r}$ est un vecteur unitaire qui définit la direction de propagation de la puissance émise. Afin de simplifier le discours, nous avons décidé de donner à $\mathbb{F}$ le nom «actuis». Ce nom est inspiré du latin *actus* qui signifie action, travail, poussée, impulsion. L'actuis $\mathbb{F}$ constitue donc une puissance dirigée dont la dimension est homogène à des watts. La figure 1 montre, sur un système conservatif composé d'une masse M, comment s'établit $\mathbb{F}$ lors d'une perte de masse dM au sein de M. Dans cet exemple, la direction de $\vec{r}$ est choisie arbitrairement parallèle à la direction $\vec{x}$ du référentiel galiléen R_0. On suppose que M émet de l'énergie pendant un instant dt. Le début de l'émission a lieu à $\tau = 0$. En observant ce qui se passe depuis le point A, point situé par exemple à une distance de M égale à $c\,dt$, l'actuis $\mathbb{F}$ apparaît à $\tau = dt$ et se maintient pendant dt. On introduit également un principe d'action-réaction qui postule que l'actuis émis $\mathbb{F}$ crée un actuis opposé $\mathbb{F}_{/M}$ s'appliquant sur M de telle sorte que :

$$\mathbb{F}_{/M} = -\mathbb{F} \tag{3}$$

Par conséquent, $\mathbb{F}_{/M}$ est présent et se transmet à M à $0 < \tau < dt$, contrairement au point A pour lequel $\mathbb{F}$ est présent à $dt < \tau < 2dt$.

2.2 Modélisation de l'actionnement

Conceptuellement, nous considérons le principe d'actionnement comme un ensemble constitué de plusieur éléments distincts. Cet ensemble comporte au minimum deux éléments massifs dont les masses au

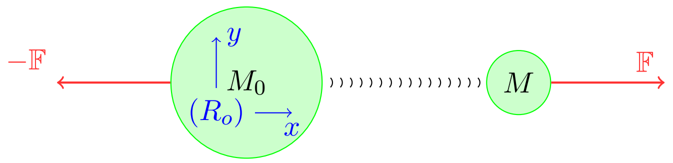

FIG. 2 – Masse M en interaction avec M_0 : M capte la puissance émise par M_0

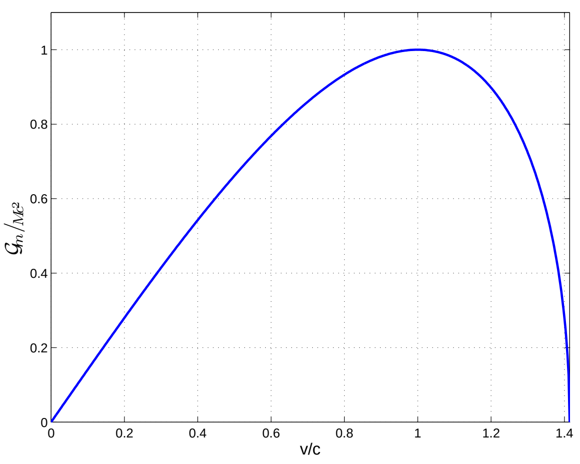

FIG. 3 – Courbe représentant le module de l'énergie orientée d'inertie de M en fonction de sa vitesse.

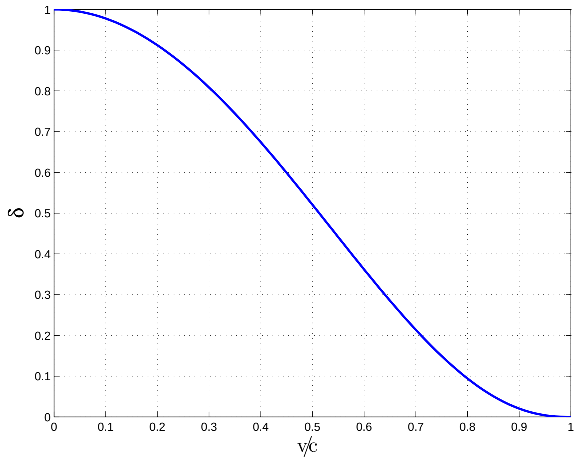

FIG. 4 – Courbe représentant l'évolution de δ en fonction de la vitesse de M.

repos seront notées respectivement M_0 et M. L'actuis est le concept par lequel des échanges d'énergie vont avoir lieu entre les masses. Le système constitué par M_0 est, par exemple, la source au sein de laquelle l'énergie sera puisée et transmise à M. Lorsque M se trouve sous l'influence de l'actuis, son mouvement se trouve modifié selon une loi déterministe. Dans un actionnement, on considère donc, d'une part, les éléments massifs et d'autre part les interactions sous forme énergétique se propageant à c dans le vide. Nous considérons, pour simplifier, que l'élément M_0 a une masse très importante en comparaison de celle de M. C'est le cas de figure très classique où M_0 est assimilé à la terre, ou bien au sol. On assimile alors le mouvement de M_0 au mouvement du référentiel galiléen R_0. On cherche à déterminer le mouvement de M à partir de la puissance dirigée captée par celle-ci tel que le montre la figure 2. Soit la loi générale posée qui permettra de calculer ce mouvement :

$$\delta\,\mathbb{F} = \frac{d}{dt}\left(M\,v\sqrt{2c^2 - v^2}\right) \qquad [\vec{W}] \tag{4}$$

Elle énonce simplement que, vu de R_0, la puissance transmise à M par l'actuis (terme de gauche) est puisée à l'inertie de la masse en mouvement (terme de droite). δ va être défini par la suite. Tout d'abord, dans le terme de droite nous trouvons l'expression de l'énergie d'inertie de la masse M en fonction de sa vitesse :

$$\mathcal{G}_m(v) = M\,v\sqrt{2c^2 - v^2} \qquad [\vec{J}] \tag{5}$$

$\mathcal{G}_m$ est un vecteur porté par v défini pour $\|v\| \in [0, \sqrt{2}\,c]$ (ou bien $\|v\| \in [0, c_o]$ en posant $c_o = \sqrt{2}\,c$) et dont la dimension est homogène à des joules. Le module de $\mathcal{G}_m$ comporte un optimum pour $v = c$ comme le montre la représentation graphique de $\mathcal{G}_m$ sur la figure 3. Le terme de gauche dans l'équation (4) représente la puissance incidente pondérée par le facteur δ. L'hypothèse posée ici consiste à considérer que l'énergie émise par M_0 n'est pas entièrement communiquée à la masse M au fur et à mesure que sa vitesse augmente. On distingue le cas limite où M va à la même vitesse que M_0. Dans ce cas, toute l'énergie émise se communique à M. Inversement, quand M va à la vitesse c, aucune énergie n'est communiquée à M, car on suppose qu'il est impossible de transmettre de l'énergie à un objet qui ne peut être atteint. Dans le premier cas on a $\delta = 1$ et dans le deuxième $\delta = 0$. L'expression

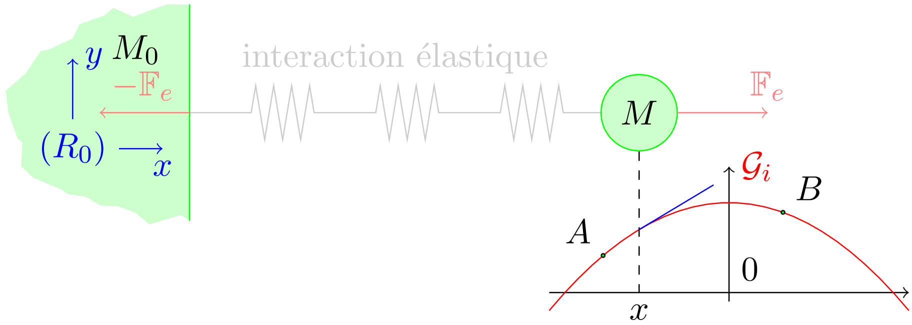

FIG. 5 – Masse M en interaction élastique avec la terre : représentation graphique du champ de puissance dirigée.

complète de δ, opérateur algébrique sans unités, est :

$$\delta(v) = \frac{\sqrt{2}\,(c^2 - v^2)^{5/2}}{c^4\,\sqrt{2c^2 - v^2}} \tag{6}$$

La figure 4 représente δ en fonction de v/c. En choisissant δ de la sorte, l'équation (4) est définie pour $\|v\| \in [0, c]$. De plus, ce choix permet au modèle d'être en accord avec la relativité restreinte. Ce point est détaillé un peu plus loin.

2.3 Propriétés de l'interaction

L'interaction est l'élément du modèle qui détermine les changements de mouvement de la masse M. C'est donc en maîtrisant cette interaction (c'est à dire en maîtrisant la puissance dirigée en tout point de l'espace) que l'on pourra contrôler le mouvement et la position de M. Nous utilisons la notion de champ pour représenter, en un point quelconque de l'espace, la puissance dirigée qui peut être communiquée. Ainsi on défini $\mathcal{G}_i$ le champ d'actuis, par :

$$\mathbb{F} = \nabla\mathcal{G}_i(x, y, z) = \left(\frac{\partial\mathcal{G}_i}{\partial x}, \frac{\partial\mathcal{G}_i}{\partial y}, \frac{\partial\mathcal{G}_i}{\partial z}\right) \tag{7}$$

Si l'on appelle $\mathcal{L}_i$ le lagrangien d'un dispositif quelconque[1] capable de fournir de l'énergie par actionnement, $\mathcal{G}_i$ est défini à partir de $\mathcal{L}_i$ par :

$$\mathcal{G}_i = c_o\,\mathcal{L}_i \qquad [W.m] \qquad \text{avec : } c_o = \sqrt{2}\,c \tag{8}$$

Le scalaire c_o est homogène à une vitesse car il est proportionnel à c. Par conséquent, il est facile de retrouver le lien qui existe entre l'actuis et la force de la mécanique classique :

$$\mathbb{F} = \nabla\mathcal{G}_i = c_o\,\nabla\mathcal{L}_i \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{F} = c_o\,F \tag{9}$$

En effet, la force est classiquement définie comme le gradient du lagrangien. Pour faciliter la compréhension du champ d'actuis $\mathcal{G}_i$, il est étudié sur un exemple simple.

3 Exemple d'utilisation du modèle

Considérons une masse au repos M située près de la surface de la terre. La masse au repos de la terre est M_0 (voir figure 5). On considère par exemple une interaction de nature élastique entre ces deux objets, laquelle est dirigée le long de l'axe $\vec{x}$. on appelle x la position de M que l'on confond avec l'élongation du ressort, les deux éléments étant liés. L'origine de R_0 est choisie de sorte que pour

[1] Exemple : pour un ressort $\mathcal{L}_i = -\frac{1}{2}\,K\,x^2$

	Classique	Energie dirigée
Interaction	$\mathcal{L}_i$	$\mathcal{G}_i = c_o\,\mathcal{L}_i$
Masse inertie	$\mathcal{L}_m = -M\,c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$	$\mathcal{G}_m = M\,v\sqrt{2\,c^2 - v^2}$
Loi de comportement	$F = \nabla\mathcal{L} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}$	$\delta\,\mathbb{F} = \delta\,\nabla\mathcal{G}_i = \frac{d\mathcal{G}_m}{dt}$
Unité loi de comp.	[N]	[W]

TAB. 1 – Comparaison entre l'écriture classique et l'approche énergie dirigée.

$x = 0$, le ressort est au repos. Dans l'hypothèse énoncée précédemment où $M << M_0$ et en tenant compte de la propriété donnée par l'équation 8, le champ d'actuis dans lequel évolue M est :

$$\mathcal{G}_i(x) = c_o(-\frac{1}{2}\,K\,x^2) \qquad [W.m] \tag{10}$$

ou K représente la raideur de l'interaction en $[N/m]$. La représentation graphique de $\mathcal{G}_i$ est donnée sur la figure 5. La puissance dirigée que reçoit M pour une position donnée est déterminé par la pente de $\mathcal{G}_i$. L'énergie E que l'interaction peut fournir pour amener M du point A au point B vaut :

$$E = \frac{\mathcal{G}_i(B) - \mathcal{G}_i(A)}{c_o} \qquad [J] \tag{11}$$

En appliquant le principe de conservation de l'énergie, on suppose que la puissance dirigée, fournie par l'interaction élastique, fait varier l'énergie dirigée stockée par inertie dans M, comme énoncé précédemment dans (4) :

$$\delta\,\frac{\partial\mathcal{G}_i}{\partial x} = \frac{d\mathcal{G}_m}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad -\delta\,c_o\,K\,x = \frac{d}{dt}\left(M\,v\sqrt{c_o^2 - v^2}\right) \tag{12}$$

Cette équation est la loi de comportement de la masse en interaction avec la terre au travers d'une interaction élastique. Nous allons montrer un peu plus loin que cette expression est en fait l'équation du mouvement de la relativité restreinte.

4 Comparaison avec l'approche classique relativiste

4.1 Ecriture de la loi de comportement

Selon l'approche classique relativiste, la fonction de Lagrange de la masse M est [5] :

$$\mathcal{L}_m = -M\,c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{13}$$

Lorsque M est en lien avec un dispositif d'actionnement quelconque dont la fonction de Lagrange est $\mathcal{L}_i$, la loi de comportement de l'ensemble masse/actionnement est obtenu en appliquant le principe de moindre action. L'action $\mathcal{S}$ est définie comme étant l'intégrale du lagrangien du système, lorsque M va d'un point A à un point B, entre deux instants t_1 et t_2 :

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,dt \qquad \text{avec : } \mathcal{L} = \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_m \tag{14}$$

La trajectoire que prend en réalité M est celle qui minimise l'action $\mathcal{S}$. Cette optimisation aboutit à la loi de comportement : l'équation de Lagrange. Pour notre approche «puissance dirigée», l'écriture de la loi de comportement est très simple. On distingue tout d'abord une masse de référence M_0 dans laquelle l'énergie est puisée. Cette énergie transite à vitesse finie, et se communique à la masse M, au point de rencontre, sous la forme d'une puissance dirigée. La loi de comportement de M découle d'une simple loi de conservation de l'énergie (voir l'équation (4)). Le tableau 1 est une synthèse des équations utilisées pour les deux approches.

4.2 Vérification de l'équivalence à la relativité restreinte

En reprenant la loi du mouvement de M énoncée par l'équation (4) et en développant les termes, à partir de l'expression de δ et de F, nous obtenons :

$$\delta\,\mathbb{F} = \delta\,c_o\,F = \frac{d}{dt}\left(M\,v\sqrt{c_o^2 - v^2}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad F = \frac{d}{dt}\left(\frac{M\,v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{15}$$

Le modèle proposé est donc équivalent à la relativité restreinte.

4.3 Simplification du modèle à petite vitesse

Lorsque $v << c$, il est possible de simplifier l'écriture du modèle en gardant uniquement le premier terme des développements limités dans les expressions de δ et de $\mathcal{G}_m$. On obtient au voisinage de $v = 0$:

$$\delta = 1 \qquad\qquad \mathcal{G}_m = M\,v\,c_o \tag{16}$$

La loi de comportement qui se décline maintenant est :

$$\begin{aligned} &\delta\,\mathbb{F} = \frac{d\mathcal{G}_m}{dt} = M\,c_o\,\dot{v} \qquad \Leftrightarrow \qquad c_o\,F = M\,c_o\,\dot{v} \\ &\Leftrightarrow F = M\,\dot{v} \end{aligned} \tag{17}$$

On retrouve donc la relation fondamentale de la dynamique car c_o se simplifie.

5 Conclusion

Le modèle présenté ici est un modèle original qui est capable de calculer le mouvement des masses dans un cas général. Sa particularité repose sur l'utilisation d'une grandeur non conventionnelle que l'on a appelée l'actuis. Dans cette approche, l'origine du mouvement provient de l'actuis, grandeur dirigée de nature énergétique et homogène à une puissance. Ainsi, toute interaction, dérivant d'un potentiel, s'exprime simplement à partir de l'expression classique de son lagrangien, à la constante c_o près et selon l'équation (8). L'actuis d'actionnement, s'apparente à une transmission d'énergie à vitesse finie dans le vide, provenant d'un objet matériel émetteur d'énergie et obtenue par perte de masse selon l'équation (2), laquelle peut être captée durant sa course par un second objet matériel, le mouvement de ce second étant régi par l'équation (4). Le différentiel de vitesse entre les deux objets matériels induit des particularités quand la possibilité de transmission de l'énergie de l'un à l'autre. Cette propriété est traduite mathématiquement par l'opérateur δ de l'équation (6). Le modèle étant posé, il reste à déterminer si ce modèle a du sens pour la physique. En outre, présente-t-il un intérêt en mécanique, ou bien est-ce un simple artifice mathématique ? Y a t'il un avantage à écrire directement sous la forme «énergie dirigée», en distinguant d'un coté l'effet inertiel des masses, et de l'autre les phénomènes d'interaction ? Conceptuellement, est-ce plus intéressant de bâtir un modèle basé sur le principe de moindre action ou sur la simple conservation de l'énergie ? D'un point de vue mathématique, le modèle est équivalent à la relativité restreinte. Maintenant, Il reste un gros travail pour rendre ce modèle objectif.

Références

[1] Lev Landau and Evguéni Lifchitz. *Physique théorique Tome 1 mécanique.* isbn : 5-03-000198-0. Editions Mir Moscou, 1982.

[2] H. Goldstein. *Classical Mechanics.* Addison-Wesley, 1980.

[3] Jean-Marie Vigoureux. *Les pommes de Newton.* isbn : 2-226-14234-7. Albin Michel, 2003.

[4] Jean-Marie Vigoureux. *L'univers en perspective - Relativité restreinte.* isbn : 2-7298-3113-4. Ellipses, 2006.

[5] Lev Landau and Evguéni Lifchitz. *Physique théorique Tome 2 Théorie des champs.* isbn : 5-03-000197-2. Editions Mir Moscou, 1989.